Département fédéral de l'intérieur DFI

Office fédéral de la santé publique OFSP
Unité de direction Assurance maladie et accidents

Annexe technique relative au test de solvabilité LAMal : le risque d'assurance

Date : 1er février 2024

Table des matières

Renseignements :

Office fédéral de la santé publique, unité de direction Assurance maladie et accidents, division Surveillance de l'assurance, section Primes et surveillance de la solvabilité ; www.bag.admin.ch/test-de-solvabilite

1 Introduction

La présente annexe technique décrit le risque actuariel, au sens qui lui est donné dans le test de solvabilité LAMal 2024. Ces dernières années, l'OFSP a examiné plusieurs adaptations de ce test portant sur les scénarios, le calcul du risque actuariel et le risque de marché. Pour le test de solvabilité LAMal 2020, les scénarios ont été retravaillés en collaboration avec l'Association Suisse des Actuaires (ASA), tandis que les adaptations du calcul du risque de marché résultent des modifications apportées au Test suisse de solvabilité (SST) par la FINMA. Aucun changement majeur technique n'a été apporté au test de solvabilité LAMal 2024 depuis la version de 2020.

En 2015 et 2016, l'OFSP a examiné le calcul des risques actuariels des prestations nettes et de la compensation des risques avec le groupe de travail Assurance-maladie de l'ASA. Les discussions ont notamment abouti au constat selon lequel ces risques devraient, dans la mesure du possible, être calculés selon les mêmes critères. En 2017, sachant que les groupes de coûts pharmaceutiques (PCG) seraient intégrés dès 2020 en tant qu'indicateurs de morbidité supplémentaires dans la compensation des risques, l'OFSP a chargé Ernst & Young (EY) d'évaluer le modèle existant et de nouveaux modèles relatifs aux risques de la compensation des risques. L'OFSP a repris une proposition d'EY consistant à calculer les risques relatifs à la compensation des risques de la même manière que pour les prestations nettes, soit comme la somme du risque aléatoire et du risque de paramètre. Il s'agit en particulier de calculer les risques aléatoires des prestations nettes et de la compensation des risques à l'aide de coefficients de variation. De plus, l'allégement pour les jeunes adultes est pris en compte dans la compensation des risques.

2 Risque aléatoire et risque de paramètre sans réassurance

Le risque actuariel se compose du risque aléatoire, du risque de paramètre et, pour l'assurance obligatoire des soins (AOS), du risque relatif à la compensation des risques. Dans l'AOS, l'agrégation du risque aléatoire et du risque de paramètre est appelée risque actuariel sans compensation des risques (sans CdR). Dans les autres branches, il s'agit simplement du risque actuariel.

Compte tenu des discussions menées avec l'ASA et d'une proposition d'EY, les risques des prestations nettes (autrement dit le risque actuariel sans CdR de la branche de l'AOS) et de la compensation des risques sont calculés selon les mêmes principes, soit au moyen des risques aléatoire et paramétrique. Le rapport d'EY, qui peut être obtenu auprès de l'OFSP, décrit les risques relatifs à la compensation des risques. Les représentations qui y sont utilisées diffèrent en partie de celles du présent document. Qu'il concerne les prestations nettes ou la compensation des risques, le calcul du risque repose sur les mêmes règles, à savoir :

- Les assurés sont répartis dans des classes de risque considérées comme homogènes.
- Les effectifs d'assurés sont considérés comme donnés, autrement dit comme une variable déterministe.
- Les coefficients de variation des risques aléatoire et paramétrique relatifs aux prestations nettes et à la compensation des risques sont estimés et indiqués par l'OFSP.

Les risques aléatoire et paramétrique des autres branches continuent d'être calculés à l'aide de coefficients de variation donnés.

Les risques des prestations nettes sont présentés au ch. 2.1 et les risques relatifs à la compensation des risques au ch. 2.2. Les deux risques sont considérés comme indépendants, dans la mesure où les prestations nettes sont estimées à partir des prestations déjà versées au cours de l'exercice courant, tandis que la compensation des risques se fonde sur les prestations de l'année précédente. Pour le calcul du risque global, les variances des prestations nettes et celles de la compensation des risques sont donc additionnées. Les risques des autres branches sont traités au ch. 2.4.

2.1 Risque des prestations nettes

Selon les règles énoncées, les assurés sont répartis dans des classes de risque considérées comme homogènes. Si Y_r désigne la meilleure estimation possible (« *best estimate* ») des prestations nettes et que Θ_r désigne les fonctions de risque des classes r, les prestations nettes effectives sont données par $S_r = \Theta_r \cdot Y_r$ (voir Gisler[1]). Soit l'espérance mathématique des fonctions Θ_r égale à un. Nous admettons pour la suite que les prestations nettes Y_r sont à la fois indépendantes les unes des autres et indépendantes des fonctions $\{\Theta_k\}_k$. Si $E(\Theta_r) = 1$, alors $E(S_r) = E(\theta_r \cdot Y_r) = E(\theta_r) \cdot\ E(Y_r) = E(Y_r)$.

Les fonctions de risque désignent les écarts entre les prestations nettes et les *best estimate* dus à des événements externes dont les effets ne sont pas ou pas entièrement connus au début de l'année. Ces événements ont un effet similaire sur les prestations nettes S_r des différentes classes r, induisant ainsi des corrélations positives entre les fonctions de risque et des erreurs d'estimation non diversifiées. La variance du total des prestations nettes S résulte de la sommation des covariances de S_r :

[1] « The Insurance Risk in the SST and in Solvency II : Modelling and Parameter Estimation », https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2704364

$$
\begin{aligned}
Var(S) = Var\left(\sum_r S_r\right) &= \sum_{r,k} Cov(S_r, S_k) = \sum_{r,k} Cov(\theta_r \cdot Y_r, \theta_k \cdot Y_k) \\
&= \sum_{r,k} [E(\theta_r \cdot Y_r \cdot \theta_k \cdot Y_k) - E(\theta_r \cdot Y_r) \cdot E(\theta_k \cdot Y_k)] \\
&= \sum_{r,k} [E(Y_r \cdot Y_k) \cdot E(\theta_r \cdot \theta_k) - E(\theta_r) \cdot E(Y_r) \cdot E(\theta_k) \cdot E(Y_k)] \\
&= \sum_{r,k} [\{Cov(Y_r, Y_k) + E(Y_r) \cdot E(Y_k)\} \cdot \{Cov(\theta_r, \theta_k) + E(\theta_r) \cdot E(\theta_k)\} - E(Y_r) \cdot E(Y_k)] \\
&= \sum_r Var(Y_r) \cdot (Var(\theta_r) + 1) + \sum_{r,k} [E(Y_r) \cdot E(Y_k) \cdot (Cov(\theta_r, \theta_k) + 1) - E(Y_r) \cdot E(Y_k)] \\
&= \underbrace{\sum_r Var(Y_r) \cdot (Var(\theta_r) + 1)}_{\text{Risque aléatoire}} + \underbrace{\sum_{r,k} E(Y_r) \cdot E(Y_k) \cdot Cov(\theta_r, \theta_k)}_{\text{Risque de paramètre}}
\end{aligned}
$$

Risque de paramètre

Les covariances des fonctions de risque des différentes classes ne sont généralement pas identiques. Le risque de paramètre dépend ainsi pour l'essentiel de la structure de risque des assureurs et varie d'un assureur à l'autre. Toutefois, les covariances sont en général inconnues et remplacées par le coefficient de variation moyen du risque de paramètre Vko_{par} :

$$
Vko_{par}^2 = \frac{\sum_{r,k} Cov(\theta_r, \theta_k) \cdot E(Y_r) \cdot E(Y_k)}{\sum_{r,k} E(Y_r) \cdot E(Y_k)}
$$

Il en découle ainsi pour le risque de paramètre (avec $Y = \sum_r Y_r$)

$$
\begin{aligned}
\sum_{r,k} Cov(\theta_r, \theta_k) \cdot E(Y_r) \cdot E(Y_k) = Vko_{par}^2 \cdot \sum_{r,k} E(Y_r) \cdot E(Y_k) &= Vko_{par}^2 \cdot \left(\sum_r E(Y_r)\right)^2 = Vko_{par}^2 \cdot E^2(Y) \\
&= Vko_{par}^2 \cdot E^2(S)
\end{aligned}
$$

Risque aléatoire

Pour le calcul du risque aléatoire des prestations nettes, les variances $Var(Y_r)$ sont exprimées par les coefficients de variation des prestations individuelles. Si n_r désigne le nombre d'assurés et Y_r^v le *best estimate* de la prestation des différents assurés des classes r, nous obtenons alors pour $Var(\Theta_r) \ll 1$

$$
\begin{aligned}
\big(1 + Var(\Theta_r)\big) \cdot Var(Y_r) \approx Var(Y_r) &= n_r \cdot Var(Y_r^v) = n_r \cdot Vko^2(Y_r^v) \cdot E^2(Y_r^v) \\
&= n_r \cdot Vko^2(Y_r^v) \cdot (E(Y_r)/n_r)^2 = Vko^2(Y_r^v) \cdot E^2(S_r)/n_r
\end{aligned}
$$

Risque des prestations nettes

La variance des prestations S correspond à la somme du risque aléatoire et du risque de paramètre :

$$
Var(S) = \sum_r Vko^2\,(Y_r^v) \cdot E^2(S_r)/n_r + Vko_{par}^2 \cdot E^2(S)
$$

2.2 Compensation des risques intégrant les PCG

2.2.1 Définitions et calcul

En vertu de l'art. 11 OCoR, les assurés sont répartis en groupes de risque, par canton, selon leur âge et leur sexe, ainsi qu'en fonction de la présence ou non d'un séjour dans un hôpital ou dans un établissement médico-social au cours de l'année précédente. L'art. 12 OCoR prévoit de plus que les assurés puissent être répartis entre les différents PCG. Cette répartition en PCG ne prend pas en compte les facteurs de risques prévus par l'art. 11 OCoR et est ainsi définie pour l'ensemble de la Suisse, et non au plan cantonal.

Livraison des données
L'art. 6 OCoR prévoit qu'aux fins de calcul de la compensation des risques de l'année de compensation t, les assureurs transmettent dans l'année $t+1$ (avec une date limite pour l'extraction des données à fin février) à l'institution commune LAMal les prestations et les données de chaque assuré pour la répartition du risque des années t et $t-1$.

Au total, quatre livraisons de données sont ainsi nécessaires pour le calcul de la compensation des risques :

- La livraison *t - 2 / 26* pour l'année *t - 2* avec une date d'extraction à fin février de l'année *t* et portant sur 26 mois fournit les indicateurs de morbidité *séjour dans un hôpital* et *PCG* en vue de la répartition des assurés pour l'année *t - 1*.
- La livraison *t - 1 / 14* pour l'année *t - 1* avec une date d'extraction à fin février de l'année *t* et portant sur 14 mois est utilisée pour le calcul des facteurs de renchérissement entre les années *t - 1* et *t*.
- La livraison *t - 1 / 26* pour l'année *t - 1* avec une date d'extraction à fin février de l'année *t + 1* et portant sur 26 mois fournit les indicateurs de morbidité *séjour dans un hôpital* et *PCG* en vue de la répartition des assurés pour l'année *t*, ainsi que les effectifs et les prestations pour l'année *t - 1*.
- La livraison *t / 14* pour l'année *t* avec une date d'extraction à fin février de l'année *t + 1* et portant sur 14 mois est utilisée pour le calcul des facteurs de renchérissement entre les années *t - 1* et *t* ; elle fournit également les effectifs de l'année *t*.

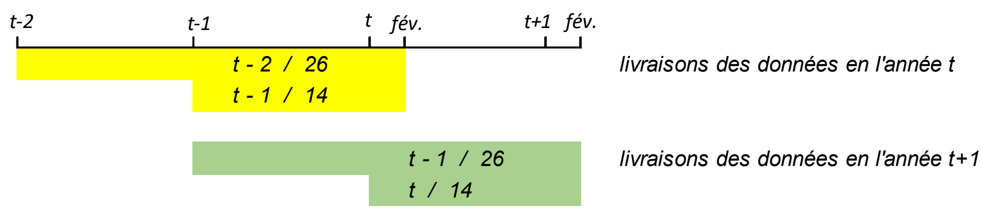

Fig. 1 : Les quatre livraisons de données des assureurs

Les facteurs de renchérissement sont calculés, comme prévu à l'art. 13 OCoR, à l'aide des prestations et des effectifs de 14 mois de l'année de compensation t et de l'année précédente $t-1$ (voir ch. 6.1). Les prestations de chaque assuré durant l'année de compensation t et les taux de compensation, notamment, sont établis au moyen d'une régression linéaire (voir ch. 6.2) sur la base des données de 26 mois de l'année précédente $t-1$ (préalablement corrigées à l'aide des facteurs de renchérissement). Les versements de compensation des risques sont calculés à partir des résultats de la régression linéaire et des effectifs d'assurés durant l'année t en tenant compte des facteurs de morbidité *séjour dans un hôpital* et *PCG* de l'année $t-1$.

Calcul de la compensation des risques
Le calcul des moyennes de groupe de l'année précédente $D_{k,r}(t-1)$ au sens de l'art. 13 OCoR, autrement dit le calcul de la moyenne des prestations nettes de la classe de risque r dans le canton k, repose sur la relation suivante[2] :

$$D_{k,r}(t-1) = S^*_{k,r}(t-1)/n^*_{k,r}(t-1) = a_{k,r} + 1/n^*_{k,r}(t-1)\sum_p m^*_{k,r,p}(t-1)\cdot b_p$$

$S^*_{k,r}(t-1)$ désigne ici les prestations nettes (multipliées par le facteur de renchérissement) de l'année précédente dans la classe de risque r et dans le canton k, $n^*_{k,r}(t-1)$ les effectifs d'assurés de l'année précédente de tous les assureurs de la classe de risque r et du canton k, et $m^*_{k,r,p}(t-1)$ les effectifs d'assurés de l'année précédente de tous les assureurs de la classe de risque r dans le canton k et dans le PCG p. Les paramètres $a_{k,r}$ et b_p correspondent aux moyennes de groupe modifiées, au sens de l'art. 18 OCoR, de la classe de risque r dans le canton k et aux suppléments pour les PCG définis pour l'ensemble de la Suisse conformément à l'art. 15 OCoR pour le PCG p.

[2] Celle-ci correspond aux équations $S_l^{RIS} = A_{ll}\cdot a_l + \sum_p B_{lp}\cdot b_p$ du ch. 6.2.

Le total des prestations nettes attendues durant l'année de compensation dans les différents groupes de risque au sens de l'art. 14, al. 1, OCoR s'obtient ainsi :

$$S^*_{k,r} = n^*_{k,r} \cdot a_{k,r} + \sum_p m^*_{k,r,p} \cdot b_p$$

$n^*_{k,r}$ et $m^*_{k,r,p}$ désignent les effectifs de risque durant l'année de compensation t, $n^*_{k,r}$ correspondant au nombre d'assurés de tous les assureurs du canton k dans la classe de risque r et $m^*_{k,r,p}$ au nombre d'assurés de tous les assureurs du canton k dans la classe de risque r et dans le PCG p. En conséquence, les moyennes cantonales (ou moyennes générales au sens de l'art. 14, al. 2, OCoR) s'établissent ainsi :

$$D_k = \frac{1}{n^*_{k,*}} \cdot \sum_r S^*_{k,r} = \frac{1}{n^*_{k,*}} \cdot \sum_r \left(n^*_{k,r} \cdot a_{k,r} + \sum_p m^*_{k,r,p} \cdot b_p \right) = \frac{1}{n^*_{k,*}} \cdot \left(\sum_r n^*_{k,r} \cdot a_{k,r} + \sum_p m^*_{k,*,p} \cdot b_p \right)$$

La compensation des risques RA^V_k de l'assureur V du canton k se calcule donc par

$$RA^V_k = \sum_r n^V_{k,r} \cdot \left(a_{k,r} - D_k + L_{k,r}\right) + \sum_p m^V_{k,*,p} \cdot b_p$$

où $n^V_{k,r}$ désigne l'effectif de risque de l'assureur V dans le canton k et la classe r durant l'année t et $m^V_{k,*,p}$ l'effectif de risque de l'assureur V dans le canton k et le PCG p durant l'année t[3].

Les taux de redevance de risque et de contributions de compensation visés à l'art. 18 OCoR correspondent à la différence $a_{k,r} - D_k$. De plus, $L_{k,r}$ exprime l'allégement pour les jeunes adultes – ou la charge supplémentaire pour les adultes – dans le canton k et la classe r, qui fait l'objet du ch. 2.2.2 ci-dessous.

Les définitions ci-dessus garantissent que la somme des montants de compensation des risques de tous les assureurs de chaque canton est égale à zéro. L'allégement pour les jeunes adultes, qui n'entraîne qu'une redistribution entre les assurés au sein des cantons, est donc égal à zéro pour l'ensemble des assurés d'un canton.

2.2.2 Allégement pour les jeunes adultes

Dès 2019 et comme le prévoit l'art. 16*a* LAMal, les versements de la compensation des risques pour les jeunes adultes sont réduits uniformément de 50 % et les redevances, resp. les contributions, pour les adultes augmentées, resp. diminuées, de manière correspondante. À cet effet, les contributions pour les jeunes adultes, suppléments pour PCG inclus, sont déterminées pour tous les assureurs sur une base cantonale. La moitié de ce montant total est répercutée de manière uniforme aux adultes du canton. **Avant allégement**, le montant total à redistribuer $RA^*_{0,k}(JE)$ à la compensation des risques pour les jeunes adultes par l'ensemble des assureurs du canton k équivaut donc à

$$RA^*_{0,k}(JE) = \sum_r n^*_{k,r}(JE) \cdot \left(a_{k,r} - D_k\right) + \sum_p m^*_{k,*,p}(JE) \cdot b_p \leq 0$$

La somme des classes de risque r ne prend en compte que les classes des jeunes adultes pour lesquelles $n^*_{k,r}(JE) > 0$. Les effectifs $m^*_{k,*,p}(JE)$ indiquent le nombre de jeunes adultes de tous les assureurs du canton k et du PCG p. Comme les jeunes adultes sont dans l'ensemble des contributeurs

[3] (Bürgin, 2019) démontre dans la section E.1 que cette définition utilisée pour le calcul de la compensation des risques diverge de celles de l'OCoR. Essentiellement, les taux de redevance de risque et les taux de contributions de compensation entre les deux approches diffèrent. Dans la mesure ou l'espérance mathématique du montant de la compensation des risques, comparé au risque de la compensation des risques, a une plus grande influence sur le ratio de solvabilité, l'OFSP recommande pour l'estimation des taux de redevance de risque et des taux de contributions de compensation l'utilisation de la méthode de calcul de (Bürgin, 2019). Cette méthode correspond à la méthode de calcul officielle de la compensation des risques selon l'OCoR.

nets, $RA^*_{0,k}(JE)$ est négatif. S'agissant de l'allégement ou de la charge supplémentaire $L_{k,r}$ par assuré, il en résulte donc

$$L_{k,r} = \begin{cases} -0.5 \cdot RA^*_{0,k}(JE)/n^*_{k,*}(JE) & \text{pour les classes de risque } r \text{ des jeunes adultes} \\ \;\;0.5 \cdot RA^*_{0,k}(JE)/n^*_{k,*}(E) & \text{pour les classes de risque } r \text{ des adultes} \end{cases}$$

où $n^*_{k,*}(JE)$ et $n^*_{k,*}(E)$ représentent respectivement le nombre de jeunes adultes et le nombre d'adultes dans le canton *k* pour l'ensemble des assureurs. La compensation des risques après allégement s'établit donc par assureur et par canton à

$$\begin{aligned} RA^V_k &= RA^V_{0,k} - n^V_{k,*}(JE) \cdot 0.5 \cdot RA^*_{0,k}(JE)/n^*_{k,*}(JE) + n^V_{k,*}(E) \cdot 0.5 \cdot RA^*_{0,k}(JE)/n^*_{k,*}(E) \\ &= RA^V_{0,k} - 0.5 \cdot \left(\frac{n^V_{k,*}(JE)}{n^*_{k,*}(JE)} - \frac{n^V_{k,*}(E)}{n^*_{k,*}(E)} \right) \cdot RA^*_{0,k}(JE) \end{aligned}$$

2.2.3 Risque de la compensation des risques

Le risque de la compensation des risques intégrant les PCG se calcule pour l'essentiel comme le risque des prestations nettes au ch. 2.1. Les versements de compensation des risques sont représentés ci-après comme la somme des paramètres $a_{k,r}$ et b_p multipliés par des coefficients qui ne dépendent que des effectifs d'assurés. Conformément au ch. 6.2, les paramètres $a_{k,r}$ et b_p ou les vecteurs de paramètres a et b peuvent être calculés au moyen de la régression linéaire, en tant que combinaisons linéaires de prestations nettes ou des vecteurs S^{RIS} et S^{PCG}, les coefficients ne dépendant à nouveau que des effectifs. La somme des versements de compensation des risques RA^V peut donc être représentée comme la somme des prestations nettes, multipliées par des coefficients qui ne dépendent que des effectifs et sont donc déterministes.

Pour calculer le risque de la compensation des risques, les versements de compensation des risques, y compris les moyennes générales cantonales et l'allégement pour les jeunes adultes, sont établis de manière linéaire à l'aide des paramètres $a_{k,r}$ et b_p. Avant l'allégement pour les jeunes adultes, les versements de compensation des risques correspondent à

$$\begin{aligned} RA^V_{0,k} &= \sum_r n^V_{k,r} \cdot \left(a_{k,r} - \frac{1}{n^*_{k,*}} \cdot \left(\sum_{r'} n^*_{k,r'} \cdot a_{k,r'} + \sum_{p'} m^*_{k,*,p'} \cdot b_{p'} \right) \right) + \sum_p m^V_{k,*,p} \cdot b_p \\ &= \sum_r n^V_{k,r} \cdot a_{k,r} - \frac{n^V_{k,*}}{n^*_{k,*}} \cdot \sum_r n^*_{k,r} \cdot a_{k,r} - \frac{n^V_{k,*}}{n^*_{k,*}} \cdot \sum_p m^*_{k,*,p} \cdot b_p + \sum_p m^V_{k,*,p} \cdot b_p \\ &= \sum_r \left(n^V_{k,r} - \frac{n^V_{k,*}}{n^*_{k,*}} \cdot n^*_{k,r} \right) \cdot a_{k,r} + \sum_p \left(m^V_{k,*,p} - \frac{n^V_{k,*}}{n^*_{k,*}} \cdot m^*_{k,*,p} \right) \cdot b_p \end{aligned}$$

Afin de tenir compte de l'allégement pour les jeunes assurés, on calcule leur part des versements de compensation des risques pour l'ensemble de la branche :

$$RA^*_{0,k}(JE) = \sum_r \left(n^*_{k,r}(JE) - \frac{n^*_{k,*}(JE)}{n^*_{k,*}} \cdot n^*_{k,r} \right) \cdot a_{k,r} + \sum_p \left(m^*_{k,*,p}(JE) - \frac{n^*_{k,*}(JE)}{n^*_{k,*}} \cdot m^*_{k,*,p} \right) \cdot b_p$$

$n^*_{k,*}(JE)$ ne diffère de zéro que pour les classes de risque des jeunes adultes. Conformément aux résultats du ch. 2.2.2, il en résulte

$$\begin{aligned} RA^V_k &= RA^V_{0,k} - 0.5 \cdot \left(\frac{n^V_{k,*}(JE)}{n^*_{k,*}(JE)} - \frac{n^V_{k,*}(E)}{n^*_{k,*}(E)} \right) \cdot RA^*_{0,k}(JE) = \\ &= \sum_r \left(n^V_{k,r} - \frac{n^V_{k,*}}{n^*_{k,*}} \cdot n^*_{k,r} - 0.5 \cdot \left(\frac{n^V_{k,*}(JE)}{n^*_{k,*}(JE)} - \frac{n^V_{k,*}(E)}{n^*_{k,*}(E)} \right) \cdot \left(n^*_{k,r}(JE) - \frac{n^*_{k,*}(JE)}{n^*_{k,*}} \cdot n^*_{k,r} \right) \right) \cdot a_{k,r} \end{aligned}$$

$$+\sum_p \left(m_{k,*,p}^V - \frac{n_{k,*}^V}{n_{k,*}^*} \cdot m_{k,*,p}^* - 0.5 \cdot \left(\frac{n_{k,*}^V(JE)}{n_{k,*}^*(JE)} - \frac{n_{k,*}^V(E)}{n_{k,*}^*(E)} \right) \cdot \left(m_{k,*,p}^*(JE) - \frac{n_{k,*}^*(JE)}{n_{k,*}^*} \cdot m_{k,*,p}^* \right) \right) \cdot b_p$$

La compensation des risques où

$$\alpha_{k,r}^V = \left(\frac{n_{k,r}^V}{n_{k,r}^*} - \frac{n_{k,*}^V}{n_{k,*}^*} - 0.5 \cdot \left(\frac{n_{k,*}^V(JE)}{n_{k,*}^*(JE)} - \frac{n_{k,*}^V(E)}{n_{k,*}^*(E)} \right) \cdot \left(\frac{n_{k,r}^*(JE)}{n_{k,r}^*} - \frac{n_{k,*}^*(JE)}{n_{k,*}^*} \right) \right) \cdot n_{k,r}^*$$

$$\beta_{k,p}^V = \left(\frac{m_{k,*,p}^V}{m_{k,*,p}^*} - \frac{n_{k,*}^V}{n_{k,*}^*} - 0.5 \cdot \left(\frac{n_{k,*}^V(JE)}{n_{k,*}^*(JE)} - \frac{n_{k,*}^V(E)}{n_{k,*}^*(E)} \right) \cdot \left(\frac{m_{k,*,p}^*(JE)}{m_{k,*,p}^*} - \frac{n_{k,*}^*(JE)}{n_{k,*}^*} \right) \right) \cdot m_{k,*,p}^*$$

peut donc être exprimée ainsi :

$$RA^V = \sum_{k,r} \alpha_{k,r}^V \cdot a_{k,r} + \sum_{k,p} \beta_{k,p}^V \cdot b_p = \sum_{k,l} \gamma_{k,l}^V \cdot c_{k,l}$$

Pour calculer le risque relatif à la compensation des risques, les indices r et p sont regroupés au sein de l'indice l, ce qui veut dire que les coefficients $\alpha_{k,r}^V$ et $\beta_{k,p}^V$ peuvent être exprimés par $\gamma_{k,l}^V$ et les paramètres $a_{k,r}$ et b_p par $c_{k,l}$.
Puisque les facteurs $\gamma_{k,l}^V$ ne dépendent que des effectifs d'assurés et sont donc déterministes de par les conditions initiales, seules les variances des paramètres $c_{k,l}$ doivent être estimées.

Les risques ou les variances de la compensation des risques peuvent donc pour l'essentiel être calculés de la même manière que les risques ou les variances des prestations nettes au ch. 2.1, en remplaçant les prestations nettes par $\gamma_{k,l}^V \cdot c_{k,l}$.

Risque de paramètre
Aux conditions énoncées ci-dessus, le risque de paramètre de la compensation des risques résulte de la relation $\sum_{r,k} Cov(\theta_r, \theta_k) \cdot E(Y_r) \cdot E(Y_k)$ établie au ch. 2.1, dans laquelle les variables θ_r et Y_r sont remplacées par $\theta_{k,l}$ et $\gamma_{k,l}^V \cdot c_{k,l}$ et les variables θ_k et Y_k par $\theta_{k',l'}$ et $\gamma_{k',l'}^V \cdot c_{k',l'}$. Nous obtenons ainsi

$$\sum_{k,k',l,l'} Cov(\theta_{k,l}, \theta_{k',l'}) \cdot \gamma_{k,l}^V \cdot E(c_{k,l}) \cdot \gamma_{k',l'}^V \cdot E(c_{k',l'}) = Vko_{par}^2 \cdot \left(\sum_{k,l} \gamma_{k,l}^V \cdot E(c_{k,l}) \right)^2$$

$$= Vko_{par}^2 \cdot E^2 \left(\sum_{k,r} \alpha_{k,r}^V \cdot a_{k,r} + \sum_{k,p} \beta_{k,p}^V \cdot b_p \right) = Vko_{par}^2 \cdot E^2(RA^V)$$

Risque aléatoire
Le risque aléatoire de la compensation des risques, pour lequel on suppose l'indépendance des paramètres $c_{k,l}$, résulte de la formule $\sum_r Var\,(Y_r)$ énoncée au ch. 2.1, dans laquelle Y_r est remplacé par $\gamma_{k,l}^V \cdot c_{k,l}$:

$$\sum_{k,l} Var(\gamma_{k,l}^V \cdot c_{k,l}) = \sum_{k,l} (\gamma_{k,l}^V)^2 \cdot Var(c_{k,l}) = \sum_{k,l} (\gamma_{k,l}^V)^2 \cdot Vko^2(c_{k,l}) \cdot E^2(c_{k,l})$$

$$= \sum_{k,r} (\alpha_{k,r}^V)^2 \cdot Vko^2(a_{k,r}) \cdot E^2(a_{k,r}) + \sum_{k,p} (\beta_{k,p}^V)^2 \cdot Vko^2(b_p) \cdot E^2(b_p)$$

$$= \sum_{k,r} (\alpha_{k,r}^V)^2 \cdot Vko^2(Y_{k,r}^V) \cdot E^2(a_{k,r}) / n_{k,r}^* + \sum_{k,p} (\beta_{k,p}^V)^2 \cdot Vko^2(Y_p^V) \cdot E^2(b_p) / m_{k,r}^*$$

Les coefficients de variation $Vko^2(a_{k,r})$ des paramètres $a_{k,r}$ et des suppléments pour PCG b_p sont exprimés par les coefficients de variation des prestations individuelles (voir ch. 2.3).

Risque de la compensation des risques
La variance de la compensation des risques est calculée comme la somme des variances du risque de paramètre et du risque aléatoire :

$$Var(RA^V) = Vko_{par}^2 \cdot E^2(RA^V) + \sum_{k,r} \left(\alpha_{k,r}^V\right)^2 \cdot Vko^2\left(Y_{k,r}^V\right) \cdot E^2\left(a_{k,r}\right)/n_{k,r}^* + \sum_{k,p} \left(\beta_{k,p}^V\right)^2 \cdot Vko^2\left(Y_p^V\right) \cdot E^2\left(b_p\right)/m_{k,r}^*$$

2.3 Saisies des assureurs

En ce qui concerne les prestations nettes, les estimations de l'espérance mathématique et du risque aléatoire sont saisies dans la feuille 35 « Zufallsrisiko_NL ». Les assureurs inscrivent les effectifs de risque et les prestations nettes (en mio. CHF) estimés par classe de risque de tous les cantons pour l'exercice sous revue et l'exercice précédent. Les prestations nettes sont saisies comme valeurs positives. Les effectifs figurant dans la feuille 36 « Risk_Compensation » sont repris automatiquement. Outre les assurés des classes de compensation des risques, les autres personnes assurées dans le cadre de l'AOS qui ne sont pas soumises à la compensation des risques, comme les enfants et les assurés de l'AOS UE, sont également pris en compte. Toute différence entre les prestations nettes indiquées dans la feuille « Zufallsrisiko_NL » et celles mentionnées dans la feuille « Insurance_Risk » doit être justifiée.

Pour ce qui est de la compensation des risques, les données à saisir dans la feuille « Risk_Compensation » sont comme jusqu'ici les effectifs moyens des assureurs par classe de compensation des risques et par canton, ainsi que par PCG et par canton. Il faut en outre estimer et indiquer les taux de compensation des risques par classe de risque et par canton (par mois en CHF) ainsi que les suppléments pour PCG (par mois en CHF).

Il convient d'expliquer les différences entre l'espérance mathématique des prestations nettes indiquée sur la feuille n°35 ainsi que celle de la compensation des risques mentionnée sur la feuille n°36 et les données correspondantes figurant sur la feuille n°37.

L'OFSP estime les coefficients de variation des paramètres $a_{k,r}$ et des suppléments pour PCG b_p servant au calcul du risque aléatoire à partir des données définitives du test de l'année 2021. Les coefficients de variation ont été calculés sur la base des prestations individuelles et à l'aide d'un modèle « *bootstrap* » qui tient compte d'éventuelles instabilités de la régression linéaire. Les deux procédés ont conduit à des résultats comparables en ce qui concerne les paramètres $a_{k,r}$. Les coefficients de variation des prestations individuelles, qui sont aussi utilisés pour le calcul du risque aléatoire des prestations individuelles, ont donc été repris dans le *template*. S'agissant des suppléments pour PCG, les résultats utilisés sont ceux de la méthode *bootstrap*, laquelle a livré des coefficients de variation supérieurs aux prestations individuelles. Compte tenu de la taille restreinte des effectifs dans certains cantons, les coefficients de variation des classes de risque sont calculés sous forme de moyennes de tous les cantons.

Le coefficient de variation du risque de paramètre utilisé dans la compensation des risques est fixé uniformément à 4,0 % pour l'ensemble des assureurs. L'OFSP définit également les effectifs de branche requis et les espérances mathématiques des paramètres $a_{k,r}$ pour le calcul du risque aléatoire de la feuille « Risk_Compensation_calc ». Les données servant à la compensation des risques proviennent toutes de la compensation des risques de l'année 2021. Le risque de la compensation des risques est automatiquement reporté dans la feuille « Insurance_Risk ».

2.4 Risques des autres branches

Risque aléatoire

Le risque aléatoire des autres branches correspond au risque aléatoire défini dans le document technique de la FINMA (p. 68). Il décrit les fluctuations statistiques du nombre de prestations d'assurance et de leur montant. Il dépend donc du nombre d'assurés et, par là même, de la taille de la compagnie d'assurance. Le risque aléatoire est défini comme suit pour chaque branche h de l'assurance-maladie :

$$Vko_{Z,h}(S) = \frac{\sigma_{Z,h}(S)}{E_h(S)} = \sqrt{\frac{1 + Vko_h^2(Y)}{N}}$$

S	Somme des dommages (somme des prestations individuelles Y)
$Vko_{Z,h}$	Coefficient de variation du risque aléatoire des différentes branches d'assurance LAMal (indemnité journalière individuelle et collective, réassurance active exceptée)
$\sigma_{Z,h}$	Écart-type du risque aléatoire des différentes branches d'assurance LAMal
$Vko_h(Y)$	Coefficient de variation des prestations individuelles Y des différentes branches d'assurance LAMal
N	Nombre de bénéficiaires de prestations nettes
$E_h(S)$	Espérance mathématique de la somme des dommages des différentes branches d'assurance LAMal

Pour le coefficient de variation des prestations individuelles, la valeur standard définie pour l'assurance d'indemnités journalières LAMal individuelle et collective est de 2.5:

$$Vko_{Z,h}(Y) = 2.5$$

Il en résulte : $Vko_{Z,h}(S) = \sqrt{\frac{1+2.5^2}{N}} = \sqrt{\frac{7.25}{N}}$

Risque de paramètre

Le risque de paramètre correspond à celui de la FINMA (voir document technique p. 69) et exprime les incertitudes de l'évaluation de paramètres généraux, par exemple pour la prévision de l'évolution générale des coûts ou pour celle des changements de tarifs. Le risque de paramètre est défini comme suit pour chaque branche *h* :

$$Vko_{P,h}(S) = \frac{\sigma_{P,h}(S)}{E_h(S)}$$

$Vko_{P,h}$	Coefficient de variation du risque de paramètre des différentes branches d'assurance LAMal (indemnité journalière individuelle et collective, réassurance active exceptée)
$\sigma_{P,h}$	Écart-type du risque de paramètre des différentes branches d'assurance LAMal
$E_h(S)$	Espérance mathématique de la somme des dommages des différentes branches d'assurance LAMal

3 Réassurance

Le test de solvabilité LAMal permet de tenir compte des réassurances stop-loss et gros risques. Pour ce qui est de la réassurance stop-loss, la capacité (responsabilité maximale) est désormais prise en compte.

3.1 Réduction du risque aléatoire par la réassurance des gros risques

Le risque aléatoire peut être réduit au moyen d'une réassurance des gros risques. Dans ce cas, l'assureur n'assume les prestations individuelles qu'au-dessous d'un certain seuil (quote-part). Il en résulte une réduction des coefficients de variation des prestations individuelles. Le facteur de réduction dépend de la quote-part *s* et est modélisé par une fonction de Weibull dont les paramètres *a* et *b* sont données :

$$Vko_{Z,h}(S+RV) = \frac{\sigma_{Z,h}(S+RV)}{E_h(S+RV)} = \sqrt{\frac{1+Vko_h^2(Y)\cdot\left(1-exp(-a\cdot s^b)\right)^2}{N}}$$

RV	Prestations de réassurance (part des prestations nettes assumée par le réassureur)
S	Somme des dommages (somme des prestations individuelles Y)
s	Quote-part de réassurance des gros risques
a	0.00467
b	0.553

Explication :
Cette réduction est modélisée par un facteur de réduction qui dépend de la quote-part de réassurance :

$$Vko_{xL}(Y) = F(s)\cdot Vko(Y)$$

$Vko(Y)$	Coefficient de variation des prestations individuelles Y avant réassurance
$F(s)$	Facteur de réduction
s	Quote-part de réassurance
$Vko_{xL}(Y)$	Coefficient de variation des prestations individuelles Y après réassurance

$F(s)$ a été calculé pour 42 valeurs différentes de quote-part (en abaissant à *s* toutes les prestations supérieures à *s*). Il est apparu que la relation pouvait être exprimée de manière extrêmement précise à l'aide d'une fonction de répartition de Weibull $F(s) = 1-\exp(-a\cdot s^b)$. Celle-ci remplit également les deux conditions aux limites

$F(0)=0$	transfert total du risque pour $s=0$
$F(\infty)=1$	aucune réduction du risque pour $s=\infty$

Les paramètres *a* et *b* ont été déterminés à l'aide d'une régression linéaire. La linéarisation de la fonction de Weibull

$$F(s) = 1-\ exp(-a\cdot s^b)$$
$$\ln\left(\frac{1}{1-F(s)}\right) = as^b$$
$$\ln\left[\ln\left(\frac{1}{1-F(s)}\right)\right] = \ln(a)+b\cdot\ln(s)$$

conduit donc au modèle de régression suivant :

$y=\alpha+\beta\cdot x$, où
$\alpha=\ln(a)$

$\beta = b$
$x = \ln(s)$
$y = \ln\left[\ln\left(\frac{1}{1-F(s)}\right)\right]$

avec les résultats que voici :

Statistiques de la régression		
Coefficient de corrélation multiple	0.999952	(!)
Coefficient de détermination	0.999905	
Coefficient de détermination ajusté	0.999903	
Erreur type	0.001811	
Observations	42	

	Coefficients	*Erreur type*	*Statistique t*	*Valeur p*	*95% inférieurs*	*95% supérieurs*
α	-5.366022422	0.009450822	-568	9.35464E-80	-5.385123245	-5.346921599
β	0.553353597	0.000852970	649	4.52712E-82	0.551629681	0.555077512

Les paramètres recherchés sont $a = e^{\alpha} = e^{-5.366022422} \approx 0.00467$ et $b = \beta \approx 0.553$, et la fonction recherchée est donc $F(s) = 1 - \exp\left(-a \cdot s^{b}\right) = 1 - \exp\left(-0.00467 \cdot s^{0.553}\right)$.

La comparaison entre les facteurs de réduction réels et modélisés ne donne que des écarts minimes, conformément à la valeur très élevée du coefficient de corrélation.

3.2 Réduction du risque de paramètre par la réassurance stop-loss à capacité limitée

Le risque de paramètre peut être réduit au moyen d'une réassurance stop-loss. Dans ce cas, l'assureur ne prend à sa charge la somme des prestations annuelles qu'au-dessous d'un seuil convenu (=priorité). De son côté, le réassureur peut limiter sa responsabilité maximale (=capacité). Une telle réassurance stop-loss permet de réduire le risque de paramètre σ et l'espérance mathématique μ des prestations que l'assureur primaire doit assumer. Dans l'hypothèse d'une distribution normale du montant des dommages $S = N(\mu, \sigma^2)$, les effets sur l'espérance mathématique et l'écart-type du risque de paramètre peuvent être représentés analytiquement :

La réduction attendue du montant des dommages $E(S_{SL})$ après conclusion d'une réassurance stop-loss avec une priorité P et une capacité K s'établit à :

(1) $$E(S_{SL}) = \int_{-\infty}^{P} y\varphi_S(y)dy + \int_{P}^{P+K} P\varphi_S(y)dy + \int_{P+K}^{\infty}(y-K)\varphi_S(y)dy$$

$$= \mu\Phi_P + \sigma(\varphi_{P+K} - \varphi_P) + P(\Phi_{P+K} - \Phi_P) + (\mu - K)(1 - \Phi_{P+K})$$

La variance réduite $V(S_{SL})$ après conclusion d'une réassurance stop-loss avec une priorité P et une capacité K équivaut à :

(2) $$V(S_{SL}) = E(Y_{SL}^2) - E^2(Y_{SL})$$

$$= \sigma^2\left(1 - (\Phi_{P+K} - \Phi_P) + \left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right)\varphi_{P+K} - \left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)\varphi_P\right)$$

$$+ 2\sigma\big((\mu - K)\varphi_{P+K} - \mu\varphi_P\big) + \mu^2\Phi_P + P^2(\Phi_{P+K} - \Phi_P) + (\mu - K)^2(1 - \Phi_{P+K}) - E^2(Y_{SL})$$

Notation :

$$\varphi_P = \varphi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right),\ \varphi_{P+K} = \varphi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right), \Phi_P = \Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right), \Phi_{P+K} = \Phi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right),$$

où φ et Φ désignent la fonction de densité et la fonction de répartition de la distribution normale standard.

Les démonstrations de (1) et (2) figurent au ch. 6.3.

3.3 Saisies des assureurs

Les assureurs au bénéfice d’une réassurance stop-loss à capacité limitée doivent désormais inscrire à la ligne 123 de la feuille 37 « HE_insurance_risk » les capacités correspondantes en millions de CHF en plus des autres données requises jusqu’ici. Si l’assureur n’a pas d’assurance stop-loss, les champs correspondants de la ligne 123 doivent rester vides (pas de 0). En cas de couverture illimitée ($K = \infty$), il est possible de choisir une valeur « supérieure » pour K, par exemple le décuple de l’écart-type des sinistres et prestations.

4 Le risque d’assurance dans le test de solvabilité LAMal

Connaissant les écarts-types du risque aléatoire et du risque de paramètre des différentes branches d’assurance et de la compensation des risques dans l’AOS, nous pouvons calculer l’écart-type du risque actuariel total. Dans une première étape, les risques aléatoire et paramétrique, supposés indépendants, sont agrégés à l’intérieur de chaque branche. L’écart-type du risque actuariel de la branche h (y compris le risque actuariel de l’AOS sans CdR) vaut alors pour chaque assureur (ci-après, k est omis)

$$\sigma_{VT,h}(S+RV) = \sqrt{\sigma_{Z,h}^2(S+RV) + \sigma_{P,h}^2(S+RV)} = E_h(S+RV) \cdot \sqrt{Vko_{Z,h}^2 + Vko_{P,h}^2}$$

Le risque d’assurance de l’AOS, y compris la compensation des risques, est calculé comme suit :

$$\sigma_{VT,OKP}(S+RV+RA) = \sqrt{\sigma_{S,OKP}^2(S+RV) + \sigma_{RA,OKP}^2(RA)}$$

S	Somme des dommages (somme des prestations individuelles Y)
RV	Prestations assumées par le réassureur
RA	Versements au titre de la compensation des risques

Pour l’agrégation des risques actuariels entre les différentes branches d’assurance, on suppose entre celles-ci les corrélations suivantes :

	Indemn. journ. LAMal indiv.	Indemn. journ. LAMal collective	AOS	Réassurance active AOS
Indemn. journ. LAMal indiv.	100%	75%	50%	25%
Indemn. journ. LAMal collective	75%	100%	50%	25%
AOS	50%	50%	100%	25%
Réassurance active AOS	25%	25%	25%	100%

À partir des écarts-types $\sigma_{VT,h}$ des différentes branches, formons le vecteur $\vec{\sigma}_{VT} = \begin{pmatrix} \sigma_{VT,1} \\ \vdots \\ \sigma_{VT,H} \end{pmatrix}$ et désignons par Σ_{VT} la matrice de corrélations ci-dessus. La variance σ_V du risque actuariel total est alors

$$\sigma_V = \sqrt{\vec{\sigma}_{VT}^{\mathrm{T}} \Sigma_{VT} \vec{\sigma}_{VT}}$$

5 Publication de référence

[1] FINMA : Document technique du test suisse de solvabilité (2 octobre 2006)
https://www.finma.ch/FinmaArchiv/bpv/download/f/SST_techDok_20070425_F_wo_Li.pdf

[2] Bürgin, OFSP : Formules de calcul de la compensation des risques intégrant les PCG à partir de 2020 (8 mai 2020)
https://www.bag.admin.ch/dam/bag/fr/dokumente/kuv-aufsicht/pus/risikoausgleich/[...]

6 Annexe

6.1 Facteurs de renchérissement

Les versements de compensation des risques sont calculés au moyen d'une régression linéaire à partir des effectifs et des prestations de l'année précédant l'année de compensation (voir ch. 6.2). Pour tenir compte du renchérissement entre l'année précédant l'année de compensation et cette dernière, les prestations des assurés sont corrigées à l'aide de facteurs de renchérissement cantonaux. Ceux-ci sont calculés à partir des prestations nettes de l'année de compensation t et de l'année précédente $t-1$ (dans les deux cas avec un horizon temporel à 14 mois). Comme le prévoit l'art. 13 OCoR, le renchérissement peut être échelonné en fonction du canton et de la classe de risque. Il est prévu d'appliquer des facteurs de renchérissement moyens par canton. Puisque la compensation des risques est calculée en fonction des classes de risque, seul le renchérissement non-structurel, doit être pris en compte.

Le renchérissement global τ pour un canton en particulier est défini par le quotient $\bar{x}^t/\bar{x}^{t-1}$ des coûts moyens des deux années à comparer $t-1$ et t. Ce **renchérissement global** observable $\boldsymbol{\tau}$ a deux composantes : le renchérissement structurel et le renchérissement non-structurel. Les coûts moyens peuvent d'une part varier lorsque la structure des assurés évolue. Ce **renchérissement structurel** $\boldsymbol{\tau_S}$ résulte par exemple de l'augmentation de l'espérance de vie ou du transfert d'une partie de la population vers une classe de risque supérieure. Les coûts moyens peuvent d'autre part s'élever sous l'effet du **renchérissement non-structurel** $\boldsymbol{\tau_N}$ pouvant notamment résulter d'une modification des points tarifaires.

Par la suite, pour pouvoir calculer des moyennes cantonales de renchérissement structurel et de renchérissement non-structurel, il s'agira donc de diviser le renchérissement moyen cantonal en ses deux composantes.

Les coûts moyens cantonaux résultent de la moyenne pondérée des coûts moyens des différentes classes de risque :

$$\bar{x}^t = \frac{1}{n^t}\sum_r n_r^t \cdot \bar{x}_r^t$$

$\bar{x}_r^t$	Coûts moyens de tous les assureurs pour la classe de risque *r*, pour l'année *t*
$\bar{x}^t$	Coûts moyens cantonaux de tous les assureurs, pour l'année *t*
n_r^t	Effectifs d'assurés de tous les assureurs pour la classe de risque *r*, pour l'année *t*
$n^t = \sum_r n_r^t$	Effectifs d'assurés de tous les assureurs du canton, pour l'année *t*

Le renchérissement τ peut donc aussi être représenté de la manière suivante :

$$\tau = \frac{\bar{x}^t}{\bar{x}^{t-1}} = \frac{\frac{1}{n^t}\sum_r n_r^t \cdot \bar{x}_r^t}{\frac{1}{n^{t-1}}\sum_r n_r^{t-1} \cdot \bar{x}_r^{t-1}}$$

Si l'on introduit des facteurs de renchérissement par groupe de risque τ_r et que l'on remplace $\bar{x}_r^t$ par $\tau_r \cdot \bar{x}_r^{t-1}$ dans le numérateur, il en découle :

$$\frac{1}{n^t}\sum_r n_r^t \cdot \bar{x}_r^t = \frac{1}{n^t}\sum_r n_r^t \cdot (\tau_r \cdot \bar{x}_r^{t-1}) \doteq \tau_N \cdot \frac{1}{n^t}\sum_r n_r^t \cdot \bar{x}_r^{t-1}$$

avec

$$\tau_N = \frac{\frac{1}{n^t}\sum_r n_r^t \cdot \tau_r \cdot \bar{x}_r^{t-1}}{\frac{1}{n^t}\sum_r n_r^t \cdot \bar{x}_r^{t-1}}$$

Le renchérissement non-structurel τ_N correspond ainsi à une moyenne pondérée des facteurs de renchérissement τ_r. Le renchérissement τ peut dès lors être divisé en renchérissement structurel et renchérissement non-structurel :

$$\tau = \frac{\bar{x}^t}{\bar{x}^{t-1}} = \frac{\frac{1}{n^t}\sum_r n_r^t \cdot \bar{x}_r^t}{\frac{1}{n^{t-1}}\sum_r n_r^{t-1} \cdot \bar{x}_r^{t-1}} = \tau_N \cdot \underbrace{\frac{\frac{1}{n^t}\sum_r n_r^t \cdot \bar{x}_r^{t-1}}{\frac{1}{n^{t-1}}\sum_r n_r^{t-1} \cdot \bar{x}_r^{t-1}}}_{\tau_S} = \tau_N \cdot \tau_S$$

On reconnaît dans le numérateur $\frac{1}{n^t}\sum n_r^t \cdot \bar{x}_r^{t-1}$ les prestations moyennes de l'année précédente pondérées avec les effectifs actuels, lesquelles sont déjà utilisées aujourd'hui dans la compensation des risques pour garantir un jeu à somme nulle. Ainsi le quotient τ_S mesure-t-il l'augmentation des coûts moyens $\bar{x}^{t-1}$ de l'année précédente induite par l'évolution structurelle.

6.2 Régression linéaire

Les versements de compensation des risques sont calculés, ainsi que le prévoit l'art. 16 OCoR, au moyen d'une méthode de régression qui permet d'estimer les coûts mensuels de chaque assuré[4]. Les données utilisées sont les prestations nettes et les mois d'assurance durant l'année $t-1$, les prestations étant corrigées du renchérissement non-structurel au sens du ch. 6.1.

Les paramètres de régression utilisés sont les coûts $a_{r,k}$ des classes de risque r du canton k et les coûts b_p du PCG p. Ci-après, les indices k et r des cantons et des classes de risque seront regroupés au sein de l'indice l qui prend les valeurs de 1 à 26*60 = 1560, correspondant à chaque combinaison possible de canton, groupe d'âge, sexe et séjour dans un hôpital au cours de l'année précédente. Les PCG sont définis pour l'ensemble de la Suisse et ne sont pas subdivisés en d'autres classes de risque. Chaque assuré est attribué précisément à une classe de risque l et à un ou plusieurs PCG p. Nous obtenons ainsi le modèle de régression suivant :

$$S_i = a_0 + \sum_l R_{il} \cdot a_l + \sum_p P_{ip} \cdot b_p + \varepsilon_i$$

S_i représente ici les prestations nettes mensuelles des assurés i, tandis que a_0, a_l et b_p représentent les variables de régression. Les matrices R et P expriment la répartition des assurés au sein des classes de risque et des PCG. Lorsqu'un assuré i est attribué à l'une des classes de risque l ,resp. à un PCG p, les éléments de matrice R_{il}, resp. P_{ip}, sont égaux à un, et sinon, ils sont égaux à zéro.

Les estimations a_0, a_l et b_p sont établies par méthode des moindres carrés. Les assurés i sont ici pondérés avec le nombre de leurs mois d'assurance m_i :

$$\Delta = \sum_i m_i \cdot \varepsilon_i^2 = \sum_i m_i \cdot \left(S_i - a_0 - \sum_l R_{il} \cdot a_l - \sum_p P_{ip} \cdot b_p\right)^2 = minimal$$

Ainsi

$$\partial\Delta/\partial a_0 = \sum_i 2 \cdot m_i \cdot \left(S_i - a_0 - \sum_l R_{il} \cdot a_l - \sum_p P_{ip} \cdot b_p\right) \cdot (-1) = 0$$

$$\partial\Delta/\partial a_s = \sum_i 2 \cdot m_i \cdot \left(S_i - a_0 - \sum_l R_{il} \cdot a_l - \sum_p P_{ip} \cdot b_p\right) \cdot (-R_{is}) = 0 \quad s = 1, 2, 3, \ldots\ 1560$$

[4] Les assurés correspondent en fait à des périodes de couverture : dans la régression linéaire, les assurés qui changent de canton de domicile sont par exemple traités comme des assurés différents.

$$\partial\Delta/\partial b_q = \sum_i 2 \cdot m_i \cdot \left(S_i - a_0 - \sum_l R_{il} \cdot a_l - \sum_p P_{ip} \cdot b_p \right) \cdot \left(-P_{iq}\right) = 0 \quad q = 1, 2, 3, \dots$$

Ces trois équations supposent des sommes pondérées des résidus ε_i égales à zéro, par classe d'assurés. La première équation somme en considérant les assurés de toutes les classes de risque, alors qu'en raison des dérivées internes $(-R_{is})$ et $\left(-P_{iq}\right)$ qu'elles comportent, les équations suivantes ne prennent en compte que les assurés des classes de risque s ou des PCG q. Sachant que chaque assuré est attribué exactement à l'une des 1560 classes de risque, la somme de la deuxième équation sur toutes les classes s correspond précisément à la première équation. Les équations ne sont donc pas linéairement indépendantes, ce qui signifie que le système d'équations est sous-déterminé et insoluble. C'est pourquoi pour la suite, la variable a_0 et la première équation ont été omises.

Le système d'équations restant peut être écrit sous forme de matrice :

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ & & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \\ & & & A_{LL} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1P} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{L1} & \dots & B_{LP} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1L} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{P1} & \dots & B_{PL} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1P} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{P1} & \dots & C_{PP} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_L \\ b_1 \\ \vdots \\ b_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1^{RIS} \\ \vdots \\ S_L^{RIS} \\ S_1^{PCG} \\ \vdots \\ S_P^{PCG} \end{pmatrix}$$

Les matrices partielles A, B et C peuvent être calculées formellement à l'aide des matrices R et P. Il est possible de tenir compte de la pondération avec les mois d'assurance au moyen d'une matrice diagonale M avec pour dimension le nombre d'assurés, où la diagonale comprend le nombre de mois d'assurance des assurés i, autrement dit $M_{ii} = m_i$. Il en ressort que $A = R^T \cdot M \cdot R$, $B = R^T \cdot M \cdot P$ et $C = P^T \cdot M \cdot P$.

Le système d'équations peut dès lors s'écrire comme suit :
$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^{RIS} \\ S^{PCG} \end{pmatrix}$

Les deux vecteurs $(a, b)^T$ et $(S^{RIS}, S^{PCG})^T$ contiennent les paramètres de régression recherchés, soit les prestations globales des classes de risques et des PCG. Les éléments des matrices sont calculés comme les sommes des mois d'assurance des assurés de classes de risque ou de PCG déterminés. La matrice globale, constituée des matrices partielles, est dès lors symétrique. L'élément de matrice B_{lp} contient par exemple le nombre de mois d'assurance des assurés faisant simultanément partie de la classe de risque l et du PCG p, puisque pour ces assurés i les éléments de matrice R_{il} et P_{ip} sont égaux à un. Les matrices partielles B et B^T comprennent ainsi les mois d'assurance des assurés attribués simultanément à une classe de risque et à un PCG.

La matrice partielle C représente la répartition des assurés au sein des PCG. Les éléments de matrice C_{pq} englobent les mois d'assurance des assurés classés à la fois dans les PCG p et q. Les éléments diagonaux de C comprennent ainsi le nombre d'assurés par PCG. On peut de plus affirmer que $C_{pp} = \sum_l B_{lp}$, puisque chaque assuré attribué à un PCG est également inclus dans l'une des classes de risque. La matrice partielle A contient dans sa diagonale le nombre de mois d'assurance de chaque classe de risque. A est diagonal parce que chaque assuré est exactement compris dans l'une des classes de risque.

Notamment, $S_l^{RIS} = A_{ll} \cdot a_l + \sum_p B_{lp} \cdot b_p$ est valable pour les classes de risque. Ainsi, dans le cadre de la compensation des risques sans PCG, les paramètres a_l seraient calculés comme la moyenne des coûts des classes de risque, soit $a_l = S_l^{RIS}/A_{ll}$.

Comment calculer efficacement les paramètres de régression
Le calcul de la régression linéaire pour quelque 7 millions d'adultes et de jeunes adultes, 1560 classes

de risque et plus de 30 PCG présente un grand coût computationnel. Toutefois, le système d'équations présenté ci-dessus se résout avec une relative simplicité, puisque le calcul de la matrice partielle A diagonale et de sa matrice inverse A^{-1} est aisé. En recourant aux matrices partielles, les équations peuvent être formulées de la manière suivante :

$$A \cdot a + B^T \cdot b = S^{RIS}$$
$$B \cdot a + C \cdot b = S^{PCG}$$

En déterminant le vecteur $a = A^{-1} \cdot (S^{RIS} - B^T \cdot b)$ à partir de la première équation et en l'appliquant à la seconde, le nombre d'équations à résoudre numériquement se réduit au nombre de PCG :

$$(C - B \cdot A^{-1} \cdot B^T) \cdot b = S^{PCG} - B \cdot A^{-1} \cdot S^{RIS}$$

La résolution du système d'équations réduit donne

$$a = A^{-1} \cdot \left(S^{RIS} - B^T \cdot (C - B \cdot A^{-1} \cdot B^T)^{-1} \cdot (S^{PCG} - B \cdot A^{-1} \cdot S^{RIS})\right)$$
$$b = (C - B \cdot A^{-1} \cdot B^T)^{-1} \cdot (S^{PCG} - B \cdot A^{-1} \cdot S^{RIS})$$

6.3 Démonstrations relatives à la réassurance stop-loss à capacité limitée

Démonstration de (1) :

Si la priorité n'est pas atteinte ($y < P$), la totalité des prestations est à la charge de l'assureur primaire.

Si les prestations sont incluses dans l'intervalle $P \leq y \leq P + K$, la charge financière de l'assureur primaire se limite à P.

Si la capacité est dépassée ($y > P + K$), la charge financière de l'assureur primaire se limite à $y - K$.

La charge financière attendue après réassurance se monte donc à

$$E(S_{SL}) = \int_{-\infty}^{P} y\varphi_S(y)dy + \int_{P}^{P+K} P\varphi_S(y)dy + \int_{P+K}^{\infty} (y-K)\varphi_S(y)dy$$

Ces trois intégrales se fondent sur la fonction de densité initiale φ_S (avant réassurance) :

$$\varphi_S(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Pour pouvoir effectuer le calcul, S doit d'abord être standardisé :

$$u(y) = \frac{y-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow \; y = \sigma u + \mu \; \Rightarrow dy = \sigma \cdot du$$

$$E(S_{SL}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} (\sigma u + \mu) e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2} \sigma \cdot du + P \cdot \int_{\frac{P-\mu}{\sigma}}^{\frac{P+K-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2} \sigma \cdot du + \int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty} (\sigma u + \mu - K) e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2} \sigma \cdot du \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} (\sigma u + \mu) e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2} du + P \cdot \int_{\frac{P-\mu}{\sigma}}^{\frac{P+K-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2} du + \int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty} (\sigma u + \mu - K) e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2} du \right) = J_1 + J_2 + J_3$$

La règle de dérivation $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$ applicable à la fonction de densité φ de la distribution normale standard est très utile pour calculer la première intégrale. Elle découle de :

$$\frac{d}{dx}e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2} = -xe^{-\frac{1}{2}\cdot x^2}$$

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}}(\sigma u+\mu)e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2}du$$

$$= \sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}}ue^{-\frac{1}{2}\cdot u^2}du + \mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2}du$$

$$= \sigma\int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}}u\varphi(u)du + \mu\int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}}\varphi(u)du$$

$$= \sigma\int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}}-\varphi'(u)du + \mu\cdot\Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \mu\cdot\Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right) - \sigma\cdot\varphi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)$$

N.B. : Φ désigne la fonction de répartition de la distribution normale standard.

$$J_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{P-\mu}{\sigma}}^{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}Pe^{-\frac{1}{2}\cdot u^2}du = P\int_{\frac{P-\mu}{\sigma}}^{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}\varphi(u)du = P\left(\Phi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

$$J_3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty}(\sigma u+\mu-K)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2}du$$

$$= \sigma\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty}ue^{-\frac{1}{2}\cdot u^2}du + (\mu-K)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2}du$$

$$= \sigma\cdot\int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty}u\varphi(u)du + (\mu-K)\cdot\int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty}\varphi(u)du$$

$$= \sigma\cdot\int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty}-\varphi'(u)du + (\mu-K)\cdot\left(1-\Phi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

$$= \sigma\cdot\varphi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right) + (\mu-K)\cdot\left(1-\Phi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

$$E(S) = J_1+J_2+J_3 =$$

$$= \mu\cdot\Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right) - \sigma\cdot\varphi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right) + P\left(\Phi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)\right) + \sigma\cdot\varphi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right) + (\mu-K)\left(1-\Phi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

$$= \mu \cdot \Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right) + \sigma\left(\varphi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)\right) + P\left(\Phi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)\right) + (\mu-K)\left(1-\Phi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

En utilisant les abréviations

$$\varphi_P = \varphi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right),\ \varphi_{P+K} = \varphi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right),\ \Phi_P = \Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right),\ \Phi_{P+K} = \Phi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right)$$

on obtient finalement $E(S_{SL}) = \mu\Phi_P + \sigma(\varphi_{P+K} - \varphi_P) + P(\Phi_{P+K} - \Phi_P) + (\mu - K)(1 - \Phi_{P+K})$.

Démonstration de (2) :

Pour ce qui est de la variance $V(Y_{SL})$ après réassurance stop-loss, la formule applicable est $V(Y_{SL}) = E(Y_{SL}^2) - E^2(Y_{SL})$.

Sachant que l'espérance mathématique $E(Y_{SL}) = \mu\Phi_P + \sigma(\varphi_{P+K} - \varphi_P) + P(\Phi_{P+K} - \Phi_P) + (\mu - K)(1 - \Phi_{P+K})$ est déjà connue, il suffit de calculer $E(Y_{SL}^2)$. Ici aussi, nous procédons par décomposition en trois intégrales dans les ensembles $\{y|y < P\}$, $\{y|P \leq y < P + K\}$ et $\{y|y > P + K\}$:

$$E(Y_{SL}^2) = \int_{-\infty}^{P} y^2 f(y)dy + \int_{P}^{P+K} P^2 f(y)dy + \int_{P+K}^{\infty} (y-K)^2 f(y)dy = V_1 + V_2 + V_3$$

De la standardisation

$$u(y) = \frac{y-\mu}{\sigma} \Rightarrow dy = \sigma \cdot du \quad y = \sigma u + \mu$$

découle

$$V_1 = \int_{-\infty}^{P} y^2 f(y)dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{P} y^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} (\sigma u + \mu)^2 e^{-\frac{u^2}{2}} \sigma \cdot du$$

$$= \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du + 2\sigma\mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} u e^{-\frac{u^2}{2}} du + \mu^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} u^2 \varphi(u) du + 2\sigma\mu \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} u\varphi(u) du + \mu^2 \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} \varphi(u) du = V_{11} + V_{12} + V_{13}$$

Pour calculer la première de ces trois intégrales, on utilise la relation

$$x^2\varphi(x) = \varphi(x) - \frac{d}{dx}\big(x\varphi(x)\big)$$

Elle résulte de la dérivée seconde de la densité standard normale φ :

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = -x\varphi(x)$$

$$\varphi''(x) = \tfrac{d}{dx}\big(-x\varphi(x)\big) = x^2\varphi(x) - \varphi(x) \;\Rightarrow\; x^2\varphi(x) = \varphi(x) - \tfrac{d}{dx}\big(x\varphi(x)\big)$$

$$V_1 = \sigma^2\int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} u^2\varphi(u)du + 2\sigma\mu\int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} u\varphi(u)du + \mu^2\int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}}\varphi(u)du$$

$$= \sigma^2\int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}}\big(\varphi(u) - \big(u\varphi(u)\big)'\big)du + 2\sigma\mu\int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} -\varphi'(u)du + \mu^2\int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}}\varphi(u)du$$

$$= \sigma^2\big(\Phi(\mathrm{u}) - u\varphi(u)\big)\Big|_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} - 2\sigma\mu\varphi(u)\Big|_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} + \mu^2\Phi(\mathrm{u})\Big|_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}}$$

$$= \sigma^2\left(\Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right) - \left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)\varphi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)\right) - 2\sigma\mu\varphi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right) + \mu^2\Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \sigma^2\left(\Phi_P - \left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)\varphi_P\right) - 2\sigma\mu\varphi_P + \mu^2\Phi_P$$

$$V_2 = \int_P^{P+K} P^2 f(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_P^{P+K} P^2\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}dy = P^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_P^{P+K} e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$= P^2\left(\Phi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)\right) = P^2(\Phi_{P+K} - \Phi_P)$$

$$V_3 = \int_{P+K}^{\infty}(y-K)^2 f(y)dy = \int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty}(\sigma u + \mu - K)^2\varphi(u)du$$

$$= \sigma^2\int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty} u^2\varphi(u)du + 2\sigma(\mu-K)\int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty} u\varphi(u)du + (\mu-K)^2\int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty}\varphi(u)du = V_{31} + V_{32} + V_{33}$$

$$V_{31}=\sigma^2\big(\Phi(\mathrm{u})-u\varphi(u)\big)\Big|_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty}=\sigma^2\left(1-\Phi_{P+K}+\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right)\varphi_{P+K}\right)$$

$$V_{32}=2\sigma(\mu-K)\int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty}u\varphi(u)du=-2\sigma(\mu-K)\varphi(u)\Big|_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty}=2\sigma(\mu-K)\varphi_{P+K}$$

$$V_{33}=(\mu-K)^2\int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty}\varphi(u)du=(\mu-K)^2(1-\Phi_{P+K})$$

$$V_3\ =\ V_{31}+\ V_{32}+\ V_{33}=\sigma^2\left(1-\Phi_{P+K}+\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right)\varphi_{P+K}\right)+2\sigma(\mu-K)\varphi_{P+K}+(\mu-K)^2(1-\Phi_{P+K})$$

$$V_1=\sigma^2\left(\Phi_P-\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)\varphi_P\right)-2\sigma\mu\varphi_P+\mu^2\Phi_P$$

$$V_2=P^2(\Phi_{P+K}-\Phi_P)$$

$$V_3=\sigma^2\left(1-\Phi_{P+K}+\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right)\varphi_{P+K}\right)+2\sigma(\mu-K)\varphi_{P+K}+(\mu-K)^2(1-\Phi_{P+K})$$

$$\begin{aligned}
E(Y_{SL}^2)&=V_1+V_2+V_3\\
&=\sigma^2\left[\Phi_P-\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)\varphi_P\right]-2\sigma\mu\varphi_P+\mu^2\Phi_P+P^2(\Phi_{P+K}-\Phi_P)+\sigma^2\left[1-\Phi_{P+K}+\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right)\varphi_{P+K}\right]\\
&\qquad+2\sigma(\mu-K)\varphi_{P+K}+(\mu-K)^2(1-\Phi_{P+K})\\
&=\sigma^2\left[1-\Phi_{P+K}+\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right)\varphi_{P+K}+\Phi_P-\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)\varphi_P\right]-2\sigma\mu\varphi_P+\mu^2\Phi_P+P^2(\Phi_{P+K}-\Phi_P)\\
&\qquad+2\sigma(\mu-K)\varphi_{P+K}+(\mu-K)^2(1-\Phi_{P+K})\\
&=\sigma^2\left[1-(\Phi_{P+K}-\Phi_P)+\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right)\varphi_{P+K}-\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)\varphi_P\right]-2\sigma\mu\varphi_P+\mu^2\Phi_P+P^2(\Phi_{P+K}-\Phi_P)\\
&\qquad+2\sigma(\mu-K)\varphi_{P+K}+(\mu-K)^2(1-\Phi_{P+K})\\
&=\sigma^2\left[1-(\Phi_{P+K}-\Phi_P)+\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right)\varphi_{P+K}-\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)\varphi_P\right]+2\sigma\big((\mu-K)\varphi_{P+K}-\mu\varphi_P\big)\\
&\qquad+\mu^2\Phi_P+P^2(\Phi_{P+K}-\Phi_P)+(\mu-K)^2(1-\Phi_{P+K})
\end{aligned}$$

La variance recherchée est donc :

$$\begin{aligned}
V(Y_{SL})&=E(Y_{SL}^2)-E^2(Y_{SL})\\
&=\sigma^2\left(1-(\Phi_{P+K}-\Phi_P)+\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right)\varphi_{P+K}-\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)\varphi_P\right)\\
&\quad+2\sigma\big((\mu-K)\varphi_{P+K}-\mu\varphi_P\big)+\mu^2\Phi_P+P^2(\Phi_{P+K}-\Phi_P)+(\mu-K)^2(1-\Phi_{P+K})\\
&\quad-[\mu\Phi_P+\sigma(\varphi_{P+K}-\varphi_P)+P(\Phi_{P+K}-\Phi_P)+(\mu-K)(1-\Phi_{P+K})]^2
\end{aligned}$$